*(Epreuve commune aux ENS de Lyon, Ulm et Cachan)* durée : 4 heures

***Les hypothèses ($\mathcal{H}$) et les notations importantes apparaissent en gras dans le texte**, elles sont valables à partir du moment où elles sont formulées et jusqu'à la fin du problème.*
*Un cas particulier sera étudié tout au long du problème. Les notations générales s'appliquent évidemment au cas particulier. Les questions qui ne concernent que ce cas particulier sont entre ▷ ... ◁, elles sont de deux natures : vérifier que les hypothèses faites dans le cadre général sont satisfaites dans l'exemple ou bien établir directement (essentiellement par des résultats concernant les séries de Fourier ) les résultats qui seront prouvés, par la suite et par d'autres méthodes, dans le cadre général.*
*Toutes les fonctions sont à valeurs réelles.*

## -- PARTIE I --

[a,b] est un intervalle de $\mathbf{R}$, $\mathbf{p_0}$, $\mathbf{p_1}$ **et** $\mathbf{p_2}$ **sont des fonctions continues sur [a,b].**
**($\mathcal{H}_0$) On suppose que $\mathbf{p_0}$ ne s'annule pas sur [a,b].**
On considère l'équation différentielle (E) et les conditions à la frontière (fr).

$$\mathbf{(E)}\quad p_0(t)y''(t)+p_1(t)y'(t)+p_2(t)y(t) = 0$$
$$\mathbf{(fr)}\quad y(a)=y(b)=0$$

Dans les questions repérées par ▷ ... ◁ on examinera le cas particulier suivant :
**$a = 0$, $b = \pi$, $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = 0$ et $p_2(t) = -1$ pour tout $t \in [a,b]$.**

1- ▷ Trouver, dans le cadre de l'exemple, toutes les solutions de (E) vérifiant (fr). ◁

**($\mathcal{H}_1$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que la seule solution sur [a,b] de (E) vérifiant (fr) est la fonction nulle.**

2-a- Justifier, à l'aide d'un résultat de cours, l'existence de deux solutions de (E) sur [a,b], notées $Y_1$ et $Y_2$ , vérifiant les conditions : $Y_1(a)=0$, $Y'_1(a)=1$ et $Y_2(b)=0$, $Y'_2(b)=1$.

2-b- Prouver que $Y_1$ et $Y_2$ forment un système fondamental de solutions de (E).

**f étant continue sur [a,b]**, on considère l'équation différentielle $(E)_f$ :

$$\mathbf{(E)_f}\quad p_0(t)y''(t)+p_1(t)y'(t)+p_2(t)y(t) = f(t)$$

3-a- Montrer qu'il existe, sur [a,b], une et une seule solution h de $(E)_f$ vérifiant (fr).

3-b- Trouver une fonction G, continue sur $[a,b]^2$, telle que pour toute fonction f continue sur [a,b], la solution h de $(E)_f$ vérifiant (fr) puisse s'exprimer sous la forme :

$$h(t) = \int_a^b G(t,x)f(x)dx.$$

(On pourra appliquer la méthode de variation des constantes et exprimer la fonction G, sous des formes différentes selon que x<t ou x>t, à l'aide notamment du wronskien de $(Y_1 , Y_2)$ :

$$W(Y_1 , Y_2)(x) = Y_1(x)Y_2'(x) - Y_1'(x)Y_2(x) )$$

*L'expression de G est utile pour les questions I-4, IV-2-a et IV-2-b.*

**($\mathcal{H}_2$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que $p_0$ est dérivable sur [a,b] et que pour tout $t \in [a,b]$ $p_0'(t) = p_1(t)$.**

4- Montrer que pour tout $(t,x) \in [a,b]^2$, on a : $G(t,x) = G(x,t)$.

## -- PARTIE II --

On considère les espaces vectoriels :
$\mathbf{E_{a,b}} = \{h : [a,b] \to \mathbb{R} \mid h$ de classe $C^2$ sur [a,b] et vérifiant (fr)$\}$.
$\mathbf{F_{a,b}} = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi$ continue, de classe $C^1$ par morceaux sur [a,b] et vérifiant (fr)$\}$.
$\mathbf{C_{a,b}}$= l'ensemble des fonctions continues sur [a,b].
$\mathbf{C_{a,b}}$ sera muni du produit scalaire dont l'expression est définie par : $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

On considère aussi les deux applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{L} : \mathbf{E_{a,b}} & \to & & \mathbf{C_{a,b}} \\ h & \mapsto & (t \mapsto & p_0(t)h''(t)+p_1(t)h'(t)+p_2(t)h(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{I} : \mathbf{C_{a,b}} & \to & & \mathbf{E_{a,b}} \\ f & \mapsto & (t \mapsto & \int_a^b G(t,x)f(x)dx) \end{array}$$

1-a- Vérifier que **I** est bien à valeurs dans $\mathbf{E_{a,b}}$.

1-b- Montrer que **L** et **I** sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
En déduire que pour $h \in \mathbf{E_{a,b}}$ et $\lambda$ réel, on a l'équivalence :

$$\mathbf{L}(h) = \lambda h \Leftrightarrow h = \lambda \mathbf{I}(h)$$

*Il est abusif de parler de valeur propre et de fonction propre pour **L** puisqu'il ne s'agit pas d'un endomorphisme, mais nous le ferons quand même :*
S'il existe h non nulle dans $\mathbf{E_{a,b}}$ telle que $\mathbf{L}(h) = \lambda h$, on dira que $\lambda$ est une valeur propre de **L** et h est une fonction propre associée à $\lambda$.
**On rappelle que nous avons supposé en ($\mathcal{H}_1$) que 0 n'est pas valeur propre de L.**

2- ▷ Déterminer, dans le cadre de l'exemple, les valeurs propres de **L** ainsi que les fonctions propres associées.◁

3-a- Montrer que pour toute valeur propre $\lambda$ de **L** le "sous espace propre de **L** associé à $\lambda$", c'est à dire $\{h \in \mathbf{E_{a,b}} \mid \mathbf{L}(h) = \lambda h\}$, est de dimension 1.

**($\mathcal{H}_3$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que les valeurs propres de L forment, comme dans l'exemple, une suite indexée par $\mathbb{N}^*$, notée $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
**On fixera $H_n$ une fonction propre de L associée à $\lambda_n$ qui vérifie en outre :**

$$\int_a^b H_n^2(x)dx = 1.$$

3-b- Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale pour le produit scalaire ( | ) sur $C_{a,b}$ c'est à dire que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$ on a :

$$\int_a^b H_n(t)H_m(t)dt = \delta_{n,m}$$ (Symbole de Kronecker).

(On pourra calculer une intégrale double par intégrations successives, de deux manières différentes, en utilisant le théorème de Fubini).

4- ▷ Dans le cadre de l'exemple, expliciter $H_n$ et montrer que la seule fonction de $C_{0,\pi}$, vérifiant (fr) et qui soit orthogonale pour le produit scalaire ( | ) à tous les $H_n$, est la fonction nulle.◁

**($\mathcal{H}_4$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que la propriété analogue est vraie dans le cadre général : la seule fonction f de $C_{a,b}$, vérifiant (fr) et telle que pour tout $H_n$, $\int_a^b H_n(t)f(t)dt = 0$, est la fonction nulle.**

## -- PARTIE III --

**($\mathcal{H}_5$) On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que pour tout $t \in [a,b]$, $p_0(t)>0$, $p_2(t)\leq 0$ et que $p_2$ n'est pas la fonction nulle. On pose pour tout $\varphi \in F_{a,b}$ :**

$$N(\varphi)= \left( \int_a^b (p_0(x)\varphi'^2(x) - p_2(x)\varphi^2(x))dx \right)^{1/2}$$

1-a- Justifier l'existence de cette intégrale et montrer que N est une norme associée à un produit scalaire sur $F_{a,b}$ pour lequel on utilisera la notation $\langle\varphi,\psi\rangle$.

1-b- Etablir que pour tout $h \in E_{a,b}$ et tout $\varphi \in F_{a,b}$ on a :

$$\langle h,\varphi\rangle = -(L(h)|\varphi)$$

1-c- En déduire la valeur, pour $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, de $\langle H_n, H_m\rangle$ ainsi que le signe des valeurs propres de L.

**Pour tout $f \in C_{a,b}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\gamma_n(f) = \int_a^b f(u)H_n(u)du$**

2- Soit $\varphi \in F_{a,b}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $R_n(\varphi) = \varphi - \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k(\varphi)\, H_k$

2-a- Montrer que $N^2(R_n(\varphi))= N^2(\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k(\gamma_k(\varphi))^2$.

2-b- En déduire que la série numérique $\sum \lambda_k(\gamma_k(\varphi))^2$ converge.

## -- PARTIE IV --

1- ▷ $\varphi$ étant un élément de $F_{0,\pi}$, montrer dans le cadre de l'exemple, que pour tout $t \in [0,\pi]$ $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(\varphi) H_n(t)$ et que la convergence de cette série de fonctions est uniforme sur $[0,\pi]$.◁

**On note pour tout $t \in [a,b]$ $\Phi_t(x)=G(t,x)$.**

2-a- Vérifier que l'application $\Phi_t$ ainsi définie appartient à $\mathbf{F_{a,b}}$. L'application $\Phi_t$ est-elle dérivable au point t ?

2-b- Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $t \in [a,b]$ on ait : $N^2(\Phi_t) \leq M$.

En déduire que pour tout $t \in [a,b]$ : $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k| (\gamma_k(\Phi_t))^2 \leq M$

3- Trouver, pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $H_n(t)$ et $\gamma_n(\Phi_t)$.

4-a- $\varphi$ étant toujours un élément de $\mathbf{F_{a,b}}$, prouver que la série de fonctions $\sum \gamma_n(\varphi)\, H_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b]$ .

4-b- Montrer que pour tout $t \in [a,b]$ $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(\varphi) H_n(t)$.

5-a- Etablir, pour tout $(t,x) \in [a,b]^2$, la formule : $G(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n(t)H_n(x)}{\lambda_n}$

5-b- ▷ Montrer, dans le cadre de l'exemple, que la convergence de cette dernière série de fonctions de deux variables est uniforme sur le carré $[0,\pi]^2$ (c'est à dire que l'on a convergence au sens de la norme $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in [0,\pi]^2\}$ dans l'espace des fonctions continues sur $[0,\pi]^2$).◁

Pour prouver, dans le cadre général, cette convergence uniforme sur le carré $[\mathbf{a,b}]^2$, on utilisera, sans le démontrer, le **Théorème de Dini :**

**Soit $(g_n)$ est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :**
**pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n$ est continue sur $[a,b]$,**
**pour tout $t \in [a,b]$, la suite numérique $(g_n(t))$ est croissante.**
**Si la suite de fonctions $(g_n)$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction g continue sur $[a,b]$, alors $(g_n)$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.**

6-a- Montrer dans un premier temps, la convergence uniforme sur le segment $[a,b]$ de la série de fonctions d'une seule variable :

$$\sum \frac{(H_n(x))^2}{\lambda_n}$$

6-b- En déduire la convergence uniforme sur le carré $[a,b]^2$ de la série

$$\sum \frac{H_n(t)H_n(x)}{\lambda_n}$$

7- Montrer que si $f \in \mathbf{C_{a,b}}$, on peut exprimer h, la solution de $(E)_f$ vérifiant (fr), à l'aide des fonctions $H_n$ et des nombres $\gamma_n(f)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail